

النهايات

نهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

▪ لتكن دالة عددية معرفة على مجال $[a, +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

بنفس الطريقة يمكنك التعبير عن الحالات التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

• لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{زوجي} \\ -\infty & \text{فردى} \end{cases}$

نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

▪ لتكن دالة عددية معرفة على مجال $[a, +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$ وليكن l عددا حقيقيا.

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

▪ لتكن دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty, b]$ حيث $b \in \mathbb{R}$ وليكن l' عددا حقيقيا.

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l' عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l'$.

$$n \in \mathbb{N}^*; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^*; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

لتكن دالة عددية و l عددا حقيقيا.

▪ إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فإن هذه النهاية وحيدة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ يكافئ } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \text{ يكافئ } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0$$

النهايات المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين بحيث f معرفة على مجال على الشكل $]a - \alpha, a + \alpha[$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ أو على مجموعة على الشكل $]a - \alpha, a + \alpha[- \{a\}$
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى العدد a ، فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين.
إذا كانت f تقبل نهاية l في a ، فإن هذه النهاية وحيدة.

• $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ لكل n من \mathbb{N}^*

• $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

لتكن f دالة عددية و a عددا حقيقيا.
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a ، فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين.
▪ إذا كان $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$
▪ إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ (على التوالي إلى $-\infty$) عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ (على التوالي $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$)
▪ نعرف بنفس الطريقة النهاية على اليسار لدالة في نقطة.

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

• إذا كان n زوجيا غير منعدم، فإن :

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان n فرديا غير منعدم، فإن :

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

• $n \in \mathbb{N}^* ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

لتكن f دالة عددية .

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$ يكافئ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

العمليات على النهايات

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

نهاية دالة حدودية - نهاية دالة جذرية

- لتكن P و Q دالتين حدوديتين و x_0 عددا حقيقيا .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \blacksquare \text{ في حالة } Q(x_0) \neq 0$$

- و إذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حدتي P و Q الأكبر درجة ، فإن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \quad \blacksquare$$

نهاية الدوال اللاجذرية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a, +\infty[$ بحيث: $(\forall x \in [a, +\infty[); f(x) \geq 0$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

هذه الخاصية تبقى صالحة إذا كان x يؤول إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار

نهايات الدوال المثلثية

▪ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ ▪ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ▪ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

▪ لكل a من \mathbb{R} لدينا: $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ ▪ لكل a من \mathbb{R}^* : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

▪ لكل a من \mathbb{R} لدينا: $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ ▪ $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

▪ لكل $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$: $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$ ▪ $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

النهايات و الترتيب

ليكن I مجالا من النوع $[a, +\infty[$ و l عددا حقيقيا و لتكن f و u و v دوال عددية معرفة على المجال I .

(1) إذا كان: $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) إذا كان: $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \geq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(3) إذا كان: $\begin{cases} (\forall x \in I); |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

(4) إذا كان: $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l \end{cases}$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (مبرهنة الدرك)

تبقين هذه الخاصيات تبقى صالحة إذا كان x يؤول إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار